디지털신호처리 중간시험 1

2025. 11. 3

문제 1.

1) 인과 시스템은 $n = n_0$일 때의 출력이 오직 $n \le n_0$일 때의 입력과 관계 있는 시스템을 말한다.

(현재의 출력이 오직 현재나 과거의 입력과 관계 있는 시스템을 말한다.)

인과 시스템의 임펄스 응답 조건은 다음과 같다.

$$h[n] = 0 \quad \text{for} \quad n < 0$$

2) BIBO 안정 시스템은 유한한 입력을 인가했을 때 반드시 출력이 유한한 시스템을 말한다.

안정 시스템의 임펄스 응답 조건은 다음과 같다.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$$

3) 선형성 여부

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = ax_1[-n+2] + bx_2[-n+2]$$

$$aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\} = ax_1[-n+2] + bx_2[-n+2]$$

$$T\{ax_1[n] + bx_2[n]\} = aT\{x_1[n]\} + bT\{x_2[n]\}$$

∴ 선형 시스템

시불변성 여부

$$x_1[n] = x[n - n_0]$$

$$y_1[n] = T\{x_1[n]\} = T\{x[n - n_0]\} = x[-n + 2 - n_0]$$

$$y[n - n_0] = x[-(n - n_0) + 2] = x[-n + 2 + n_0]$$

$$y_1[n] \neq y[n - n_0]$$

∴ 시변 시스템

인과성 여부

$n < 1$이면 $-n + 2 < n$이 되어 현재의 출력이 미래의 입력과 관계가 있다.

∴ 비인과 시스템

안정성 여부

$$|x[n]| < B_x \quad \Rightarrow \quad |y[n]| = |x[-n+2]| < B_x$$

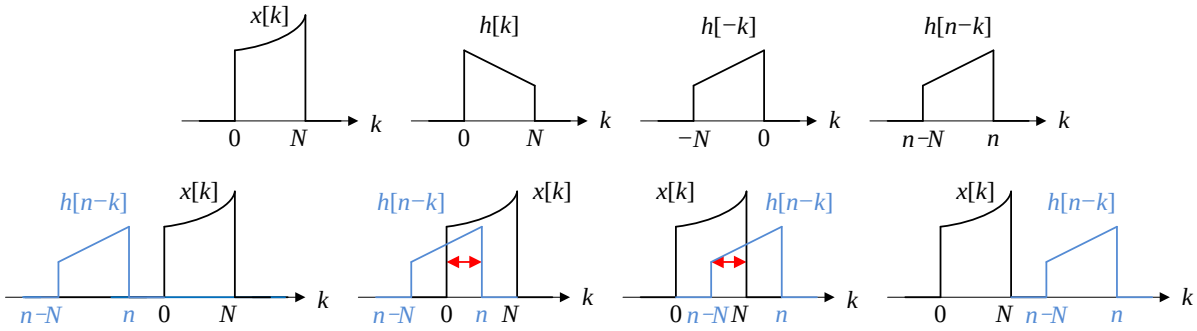
∴ 안정 시스템

문제 2.

1)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \sum_{k=p}^{q} a^k \cdot b^{n-k} = b^n \sum_{k=p}^{q} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

위 식에서 구간 $[p, q]$는 $x[k]$와 $h[n-k]$가 겹치는 구간으로 다음 그림에서 구할 수 있다.



① $n < 0$일 때 적분 구간 없음.

$$y[n] = 0$$

② $n - N \le 0 \le n$ 일 때, 즉 $0 \le n \le N$ 일 때 적분 구간 $0 \sim n$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{a}{b}}$$

③ $n - N \le N \le n$ 일 때, 즉 $N \le n \le 2N$ 일 때 적분 구간 $n - N \sim N$

$$y[n] = \sum_{k=n-N}^{N} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-N} \frac{1-\left(\frac{a}{b}\right)^{2N-n+1}}{1-\frac{a}{b}} = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{n-N} - \left(\frac{a}{b}\right)^{N+1}}{1-\frac{a}{b}}$$

④ $N < n - N$ 일 때, 즉 $n > 2N$ 일 때 적분 구간 없음.

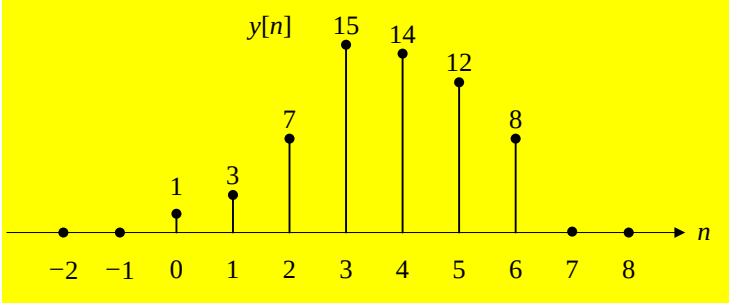
$$y[n] = 0$$

출력 (경계는 겹쳐도 무방함)

$$y[n] = \begin{cases} 0, & n < 0 \\ \dfrac{1-(a/b)^{n+1}}{1-(a/b)}, & 0 \le n \le N \\ \dfrac{(a/b)^{n-N} - (a/b)^{N+1}}{1-(a/b)}, & N \le n \le 2N \\ 0, & n > 2N \end{cases}$$

2) $a=2, b=1, N=3$ 일 때의 출력과 출력 파형

$$y[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 2^{n+1}-1, & 0\le n\le 3\\ 2^4-2^{n-3}, & 3\le n\le 6\\ 0, & n>6\end{cases}=\{1,3,7,15,14,12,8\}$$



문제 3.

지연된 신호를 단방향 z 변환하면 다음과 같다.

$$y[n] \Rightarrow Y(z)$$

$$y[n-1] \Rightarrow z^{-1}Y(z)+y[-1]=z^{-1}Y(z)-2$$

$$y[n-2] \Rightarrow z^{-2}Y(z)+y[-2]+y[-1]z^{-1}=z^{-2}Y(z)+1-2z^{-1}$$

위 식을 주어진 차분 방정식에 적용하면

$$Y(z)-\left\{z^{-1}Y(z)-1\right\}-6\left\{z^{-2}Y(z)+1-2z^{-1}\right\}=X(z)=\frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z)\left(1-z^{-1}-6z^{-2}\right)=5-12z^{-1}+\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{5-20z^{-1}+24z^{-2}}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z)=\frac{5-20z^{-1}+24z^{-2}}{\left(1-z^{-1}-6z^{-2}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}=\frac{5-20z^{-1}+24z^{-2}}{\left(1+2z^{-1}\right)\left(1-3z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}$$

$Y(z)$ 를 부분 분수 전개하면

$$Y(z)=\frac{-1}{1-2z^{-1}}+\frac{4.2}{1+2z^{-1}}+\frac{1.8}{1-3z^{-1}}$$

출력 $y[n]$ 은 다음과 같다.

$$y[n]=-2^n u[n]+4.2\times(-2)^n u[n]+1.8\times 3^n u[n]$$

문제 4.

1) 전달 함수

$$y[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]+u[n]$$

$$Y(z)=\frac{1}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}+\frac{1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{1}{1-z^{-1}}=\frac{3-\frac{19}{6}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)},\quad |z|>1$$

$$x[n]=u[n]\ \Rightarrow\ X(z)=\frac{1}{1-z^{-1}},\quad |z|>1$$

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{3-\frac{19}{6}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)},\quad |z|>\frac{1}{3}$$

2) 입출력 관계식

$$\therefore H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{3-\frac{19}{6}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}}$$

$$\left(1-\frac{7}{12}z^{-1}+\frac{1}{12}z^{-2}\right)Y(z)=\left(3-\frac{19}{6}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}\right)X(z)$$

$$\therefore y[n]-\frac{7}{12}y[n-1]+\frac{1}{12}y[n-2]=3x[n]-\frac{19}{6}x[n-1]+\frac{2}{3}x[n-2]$$

3) 부분 분수 전개하면

$$H(z)=\frac{3-\frac{19}{6}z^{-1}+\frac{2}{3}z^{-2}}{\left(1-\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=8+\frac{-2}{1-\frac{1}{3}z^{-1}}\frac{-3}{1-\frac{1}{4}z^{-1}}$$

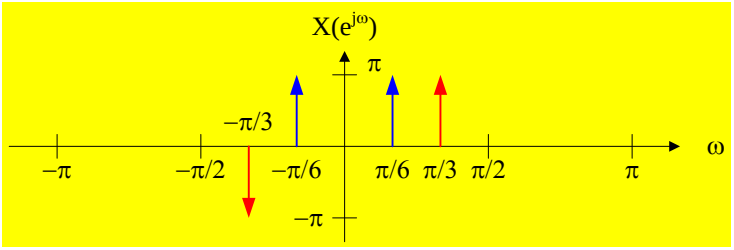
$$\therefore h[n]=8\delta[n]-2\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]-3\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$$

4) 수렴 영역이 단위원을 포함하므로 안정이다.

문제 5.

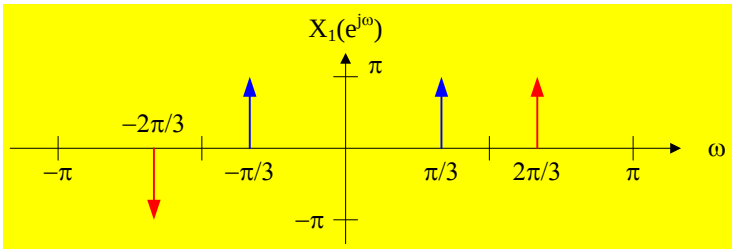
$$x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{6}n\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

1) $x[n]$의 스펙트럼 $X\left(e^{j\omega}\right)$는 아래와 같다.



2) 2배로 다운 샘플링하면 스펙트럼이 2배로 확장된다. 따라서 $X_1\left(e^{j\omega}\right)$는 다음과 같다. $X\left(e^{j\omega}\right)$

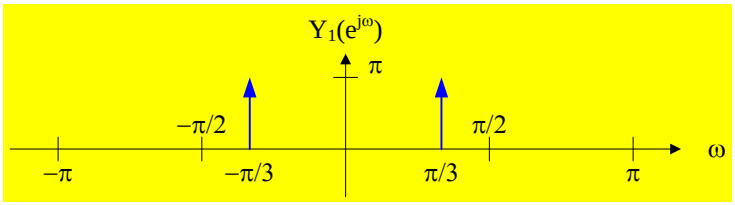
가 모두 $\omega_B = \pi/2$ 로 대역 제한되어 있어 엘리어싱이 생기지 않는다.



$x_1[n]$ 은 다음과 같다.

$$x_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}n\right)$$

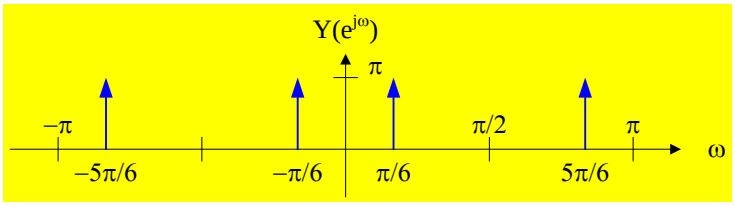
3) 차단 주파수가 $\omega_c = \pi/2$ 인 LPF를 통과하면 $Y_1\left(e^{j\omega}\right)$ 은 다음과 같다.



$y_1[n]$ 은 다음과 같다.

$$y_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{3}n\right)$$

4) 2배로 업 샘플링하면 스펙트럼이 2배로 압축된다. 따라서 $Y\left(e^{j\omega}\right)$ 는 다음과 같다. ($-2\pi+\pi/3=-5\pi/3$ 와 $2\pi-\pi/3=5\pi/3$ 성분이 2 배로 압축되어 $-5\pi/3$ 와 $5\pi/3$ 에 상이 나타난다.)



$y[n]$ 은 다음과 같다.

$$y_1[n] = \cos\left(\frac{\pi}{6}n\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{6}n\right)$$