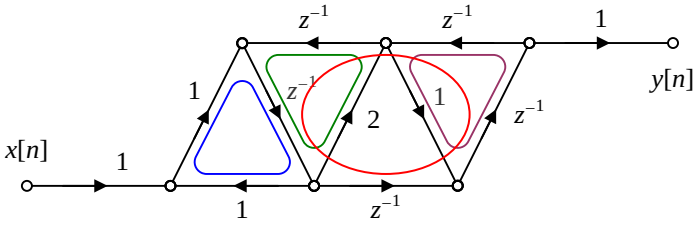
디지털신호처리 기말시험 2025. 12. 22

문제 1.

2 개의 forward path (이득이 $H_1 = 2z^{-2}$, $H_2 = z^{-3}$)와 4 개의 루프 (루프 이득이 $L_1 = z^{-1}$, $L_2 = 2z^{-2}$, $L_3 = z^{-2}$, $L_4 = z^{-5}$)가 존재하며, L_1, L_3 루프는 서로 닿지 않는다. 모든 루프는 2 개의 forward path와 닿는다. 따라서 전달 함수는 다음과 같다.



$$\Delta = 1-(L_1+L_2+L_3+L_4)+L_1L_3 = 1-\left(z^{-1}+2z^{-2}+z^{-2}+z^{-5}\right)+z^{-3} = 1-z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}$$

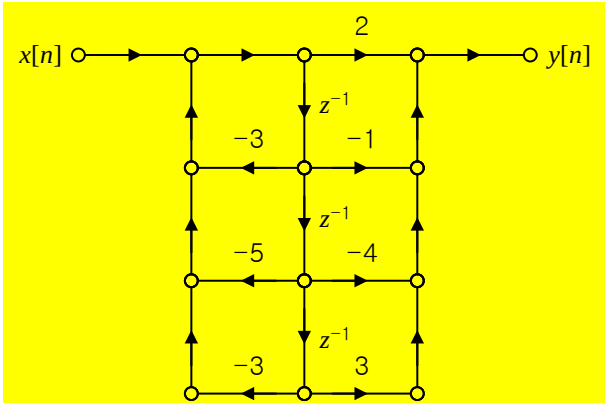
$$H_1 = 2z^{-2}, \quad \Delta_1 = 1$$

$$H_2 = z^{-3}, \quad \Delta_2 = 1$$

$$\therefore H(z) = \frac{H_1\Delta_1 + H_2\Delta_2}{\Delta} = \frac{2z^{-2}+z^{-3}}{1-z^{-1}-3z^{-2}+z^{-3}-z^{-5}}$$

문제 2.

1) 직접 형 II



2) 직렬 형: 전달 함수를 인수분해하면 직렬 형을 얻을 수 있다.

$$H(z) = \frac{2-z^{-1}-4z^{-2}+3z^{-3}}{1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}} = 2\frac{\left(1+0.5z^{-1}-1.5z^{-2}\right)\left(1-z^{-1}\right)}{\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}\right)\left(1+z^{-1}\right)} = 2\cdot\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\cdot\frac{1+0.5z^{-1}-1.5z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}} \quad \cdots(\mathrm{A})$$

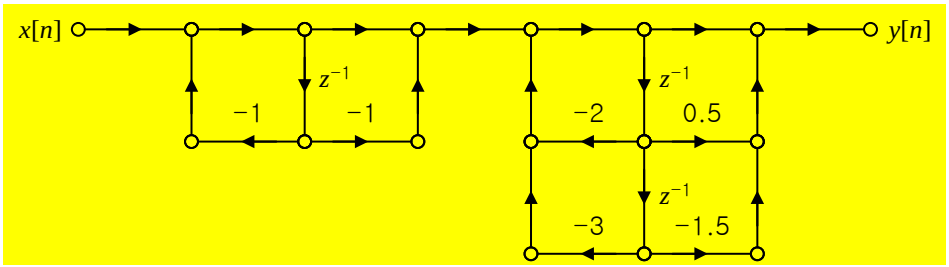
위 식은 MATLAB을 돌려서 얻은 결과입니다. 분자와 분모의 근은 각각 다음과 같습니다.

분자의 근: $z=-1.5,\ \ 1,\ \ 1$, 분모의 근: $z=-1\pm j\sqrt{2},\ \ -1$

분모의 근에는 허수가 있으므로 두개는 반드시 묶어야 하므로 $(1+z^{-1})(1+2z^{-1}+3z^{-2})$ 가 됩니다. 분자의 근은 모두 실근이므로 $2(1+1.5z^{-1})(1-z^{-1})(1-z^{-1})$ 가 됩니다. 따라서 가능한 답은 다음과 같이 여러 개가 됩니다.

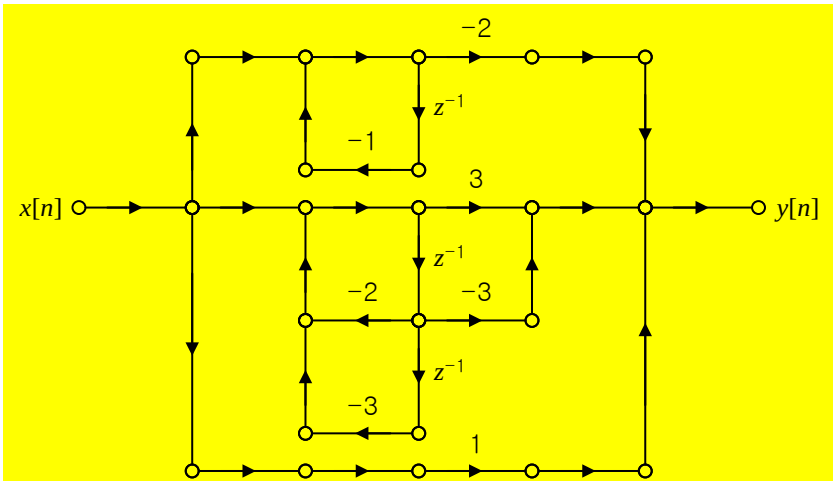
$$H_1(z)=2\frac{1+1.5z^{-1}}{1+z^{-1}}\frac{1-2z^{-1}+z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}},\quad H_2(z)=2\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\frac{1+0.5z^{-1}-1.5z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}},\ \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\frac{2+z^{-1}-3z^{-2}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}}$$

아래 회로도는 $H_2(z)$ 를 구현한 회로도입니다. (2가 빠졌습니다. 제일 앞에 2를 추가하면 됩니다.) $H_1(z)$ 을 구현한 회로도는 모양은 같고 계수만 바뀝니다. 두 경우 모두 해답이 됩니다. 이득 2는 일반적으로 직결 회로망의 개수가 많을 경우 곱셈 수를 줄일 목적으로 직결 회로망의 분모 분자의 상수항이 모두 1이 되도록 하고 앞으로 뺍니다. 이 문제의 경우는 2를 직결 회로망에 넣어도 됩니다. 이 경우 아래 회로도에서 우측 0.5, -1.5를 1, -3으로 고치면 됩니다.

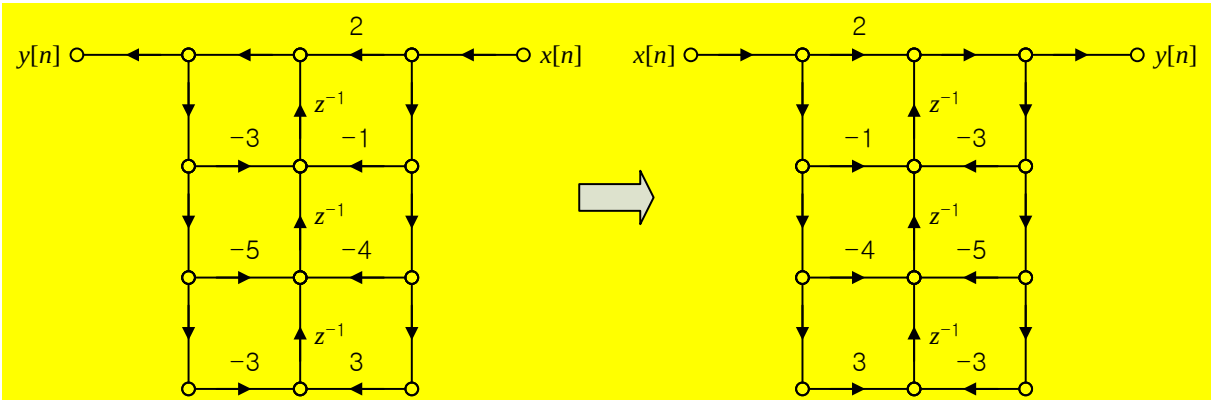


3) 병렬 형: 전달 함수를 부분 분수 전개하면 병렬 형을 얻을 수 있다.

$$H(z)=\frac{2-z^{-1}-4z^{-2}+3z^{-2}}{1+3z^{-1}+5z^{-2}+3z^{-3}}=1+\frac{2}{\left(1+z^{-1}\right)\left(1+2z^{-1}+3z^{-2}\right)}=1+\frac{-2}{1+z^{-1}}+\frac{3-3z^{-1}}{1+2z^{-1}+3z^{-2}}$$



4) 직접 형 II의 전치 형



문제 3.

1) LPF의 차단 주파수

$$\omega_c = \frac{\omega_p + \omega_s}{2} = 0.4\pi$$

위상을 고려한 이상적인 LPF의 전달 함수

$$H\left(e^{j\omega}\right) = \begin{cases} e^{-j(M/2)\omega}, & |\omega| < 0.4\pi \\ 0, & 0.4\pi < |\omega| < \pi \end{cases}$$

임펄스 응답

$$h[n] = \frac{\sin\left[\omega_c\left(n - M/2\right)\right]}{\pi\left(n - M/2\right)} = \frac{\omega_c}{\pi}\,\mathrm{sinc}\left[\frac{\omega_c\left(n - M/2\right)}{\pi}\right] = 0.4 \times \mathrm{sinc}\left[0.4\left(n - \frac{M}{2}\right)\right]$$

$$h[n] = \begin{cases} 0.4 \times \mathrm{sinc}\left[0.4\left(n - \dfrac{M}{2}\right)\right], & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

2) 카이저 창 파라미터

$$R_p = -20\log 10(1-\delta_p) \;\Rightarrow\; \delta_p = 1 - 10^{\frac{-R_p}{20}} = 0.0114$$

$$R_s = -20\log 10(\delta_s) \;\Rightarrow\; \delta_s = 10^{\frac{-R_s}{20}} = 0.01$$

$$d = \min\left(d_p, d_s\right) = 0.01$$

$$A = -20\log_{10}\left(d\right) = -20\log_{10}(0.01) = 40$$

$$\beta = 0.5842(A-21)^{0.4} + 0.07886(A-21) = 3.3953$$

$$\Delta\omega = \omega_s - \omega_p = 0.5\pi - 0.3\pi = 0.2\pi = 0.6283$$

$$M=\frac{A-8}{2.285\Delta\omega}=\frac{40-8}{2.285\times 0.2\pi}=22.2887 \quad \Rightarrow \quad M=23 \quad \Rightarrow \quad N=M+1=24$$

문제 4.

1) $x_1[n]$의 DFT $X_1[k]$

$$X_1[k]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{kn}=W_8^{k1}-W_8^{k3}+W_8^{k5}-W_8^{k7}=\sum_{n=0}^{3}(-1)^{-n}W_8^{k(2n+1)}=W_8^k\sum_{n=0}^{3}\left(-W_8^{2k}\right)^n$$

위의 식은 공비 r이 다음과 같은 등비 수열의 합이다.

$$r=-W_8^{2k}=-e^{-j\frac{2\pi}{8}2k}$$

① $r=1 \quad \Rightarrow \quad k=2,6$일 때

$$X_1[k]=W_8^k\sum_{n=0}^{3}1^n=4W_8^k=4e^{-j\frac{2\pi}{8}k}$$

$$X_1[2]=4e^{-j\frac{2\pi}{8}2}=4e^{-j\frac{\pi}{2}}=-4j\,, \qquad X_1[6]=4e^{-j\frac{2\pi}{8}6}=4e^{-j\frac{3\pi}{2}}=4j$$

② $r\neq -1 \quad \Rightarrow \quad k=0,1,3,4,5,7$일 때

$$X_1[k]=W_8^k\sum_{n=0}^{3}\left(-W_8^{2k}\right)^n=W_8^k\frac{1-\left(-W_8^{2k}\right)^4}{1+W_8^{2k}}=W_8^k\frac{1-W_8^{8k}}{1+W_8^{2k}}=0 \quad \leftarrow \quad \left(W_8^{8k}=e^{-j\frac{2\pi}{8}8k}=1\right)$$

$$\therefore X_1[k]=\{0,\,0,\,-4j,\,0,\,0,\,0,\,4j,\,0\}$$

2) $X_2[k]$의 IDFT $x_2[n]$

$$\begin{aligned}x_2[n]&=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X_2[k]W_N^{-kn}=\frac{1}{8}\left(4W_8^{-1n}+4W_8^{-5n}\right)\\&=\frac{1}{2}\left(e^{j\frac{2\pi}{8}1n}+e^{j\frac{2\pi}{8}5n}\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}1n}\left(1+e^{j\frac{2\pi}{8}4n}\right)\\&=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}1n}\left(1+e^{j\pi n}\right)=\frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{8}1n}\left[1+(-1)^n\right]\end{aligned}$$

① $n=\text{odd} \quad \Rightarrow \quad n=1,3,5,7$일 때

$$x_2[n]=0$$

② $n=\text{even} \quad \Rightarrow \quad n=0,2,4,6$일 때

$$x_2[n]=\frac{1}{2}\left[1+(-1)^n\right]=e^{j\frac{2\pi}{8}n} \quad \Rightarrow \quad x_2[0]=1,\ x_2[0]=j,\ x_2[0]=-1,\ x_2[0]=-j$$

$$\therefore x_2[n]=\{1,\,0,\,j,\,0,\,-1,\,0,\,-j,\,0\}$$

문제 5.

$$x[n] = \cos\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \{1, 0, -1, 0\}$$

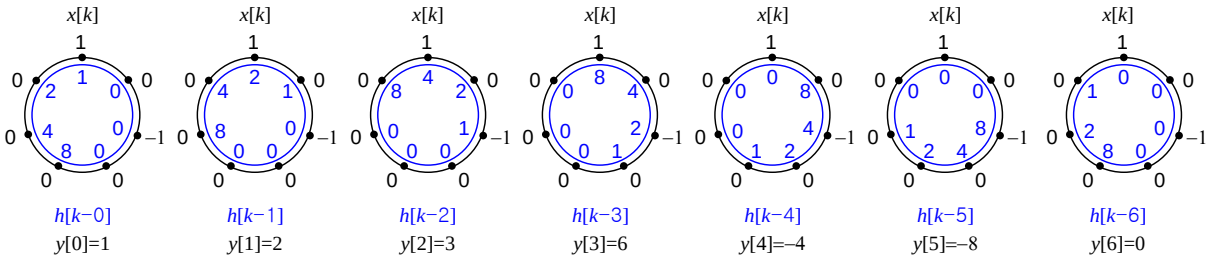
$$h[n] = 2^n = \{1, 2, 4, 8\}$$

1) 선형 컨볼루션을 이용하여 출력 $y[n]$ 구하기.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = \{1, 2, 3, 6, -4, -8, 0\}$$

2) 환형 컨볼루션을 이용하여 출력 $y[n]$ 구하기.

$x[n]$과 $h[n]$의 길이가 각각 4, 4이므로 7점 환형 컨볼루션을 구하면 선형 컨볼루션과 같게 된다.



$$y[n] = \{1, 2, 3, 6, -4, -8, 0\}$$

3) DFT를 이용하여 출력 $y[n]$ 구하기.

$x[n]$과 $h[n]$의 길이가 각각 4, 4이므로 7점 DFT를 이용하면 선형 컨볼루션을 구할 수 있다.

$$W_7^0 - W_7^{2k} \quad X[k] = \sum_{n=0}^{6} x[n]W_7^{kn} = W_7^0 - W_7^{2k}$$

$$H[k] = \sum_{n=0}^{6} h[n]W_7^{kn} = W_7^0 + 2W_7^k + 4W_7^{2k} + 8W_7^{3k}$$

$$\begin{aligned} Y[k] &= X[k]H[k] \\ &= \left(W_7^0 - W_7^{2k}\right)\left(W_7^0 + 2W_7^k + 4W_7^{2k} + 8W_7^{3k}\right) \\ &= W_7^0 + 2W_7^k + 3W_7^{2k} + 6W_7^{3k} - 4W_7^{4k} - 8W_7^{5k} \\ &= \sum_{n=0}^{6} y[n]W_7^{kn} \end{aligned}$$

$$\therefore y[n] = \{1, 2, 3, 6, -4, -8, 0\}$$

문제 6.

1) 아날로그 주파수와 디지털 주파수 사이의 관계식은 다음과 같다. (아날로그 샘플링 주파수 $F = F_S$는 디지털 각 주파수 $\omega = 2\pi$에 해당한다. 따라서 아날로그 샘플링 주파수 $F = F_S$는 디지털 주파수 $f = 1$에 해당한다.)

$$f = \frac{F}{F_s} = \frac{1000}{8000} = \frac{1}{8} = 0.125$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \times 0.125 = 0.25\pi$$

2) 0.25 초 분량의 음성 신호를 8 kHz로 샘플링하면 $N = 2000$ 개의 샘플이 얻어진다.

N 점 DFT는 구간 $0 \sim 2\pi$ 를 N 점 등간격 샘플링한 것이므로 디지털 각 주파수와 디지털 주파수의 분해도는 다음과 같다.

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{N} = \frac{2\pi}{2000} = 0.001\pi = \frac{\pi}{1000}$$

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{0.001\pi}{2\pi} = 0.0005 = \frac{1}{2000}$$

이에 대응하는 아날로그 각 주파수와 아날로그 주파수의 분해도는 다음과 같다.

$$\Delta\Omega = \Delta\omega F_s = 0.001\pi \times 8000 = 8\pi \text{ rad/sec}$$

$$\Delta F = \Delta f F_s = 0.0005 \times 8000 = 4 \text{ Hz}$$

3) 최대값을 보이는 실제 아날로그 주파수 와 디지털 주파수

$$\omega = k\Delta\omega = 500 \times 0.001\pi = 0.5\pi$$

$$F = k\Delta F = 500 \times 4 = 2000 = 2 \text{ kHz}$$

*** 알기 쉽게 정리하면 다음과 같다. ($N = 2000$, $\omega = \Omega T = \Omega / F_S$, $f = FT = F / F_S$)

Analog	$F_S = 8$ kHz	$\Omega_S = 16$ krad/s	$F = 1$ kHz	$\Omega = 2$ krad/s
Digital	$f_S = 1$	$\omega_S = 2\pi$	$f = 0.125$	$\omega = 0.25\pi$

$\Delta F = F_S / N = 4$ Hz	$\Delta\Omega = 8\pi$ rad/s	$F_{500} = 500\Delta F = 2$ kHz	$\Omega_{500} = 500\Delta\Omega = 4\pi$ kHz
$\Delta f = f_S / N = 0.0005$	$\Delta\omega = 0.001\pi$	$f_{500} = 500\Delta f = 0.25$	$\omega_{500} = 500\Delta\omega = 0.5\pi$