디지털신호처리 중간시험 1 2026. 10. 26

문제 1.

1) 선형성 판별

$$T_1\{x[n]\} = (\cos \pi n)\, x[n]$$

$$\begin{aligned} T_1\{ax_1[n] + bx_2[n]\} &= (\cos \pi n)(ax_1[n] + bx_2[n]) \\ &= a(\cos \pi n)\, x_1[n] + b(\cos \pi n)\, x_2[n] \\ &= aT_1\{x_1[n]\} + bT_1\{x_2[n]\} \end{aligned}$$

선형 시스템이다.

시불변성 판별

$$x_1[n] = x[n - n_0] \quad \Rightarrow \quad y_1[n] = T\{x_1[n]\} = (\cos \pi n)\, x_1[n] = (\cos \pi n)\, x[n - n_0]$$

$$y[n - n_0] = \left[\cos \pi (n - n_0)\right] x[n - n_0]$$

$$y_1[n] \neq y[n - n_0]$$

시변 시스템이다.

2) 안정성 판별

$x[n] \le B < \infty$ 라 하자. ($B > 0$)

$$|y[n]| = |x[n^2]| \le B < \infty$$

유한한 입력에 대해 출력이 유한하므로 안정 시스템이다.

인과성 판별

$$y[n] = T_2\{x[n]\} = x[n^2]$$

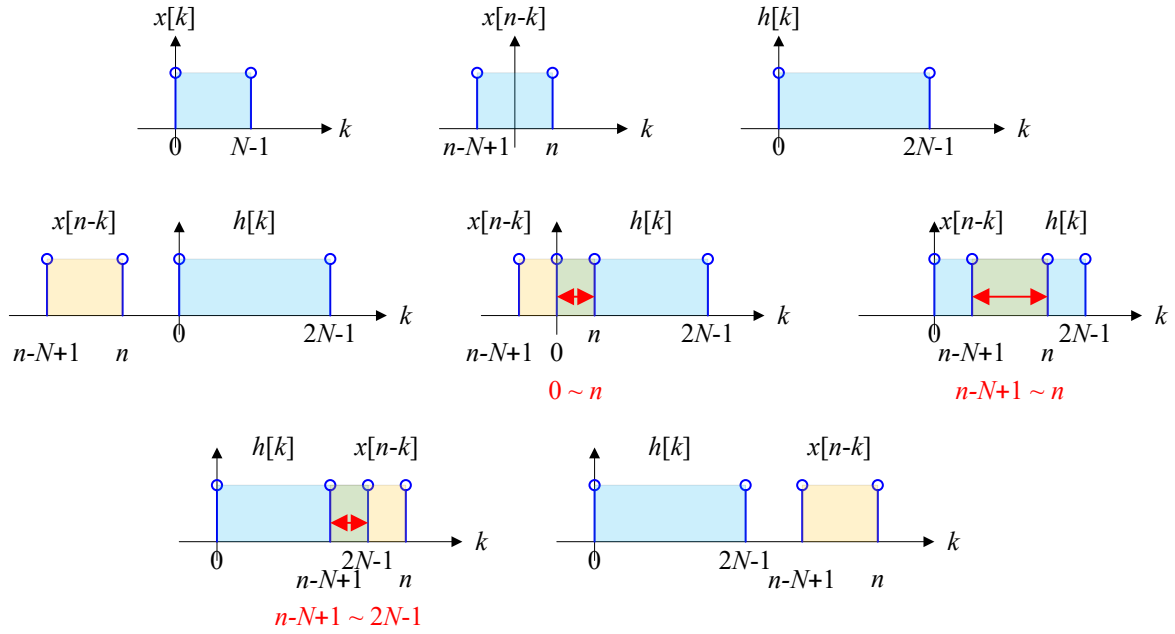
$n \le n^2$ 이므로 현재의 출력이 미래의 입력과 관계가 있다. 따라서 비인과 시스템이다.

문제 2.

1)

$$y[n] = x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[n-k]h[k] = \sum_{k=n_1}^{n_2} 1 \cdot 1$$

$x[n]$은 길이가 N이고 $h[n]$은 길이가 $2N$인 신호이다. $h[k]$를 그대로 두고 $x[k]$를 뒤집고 이동시키면서 적분 구간을 구하면 다음과 같다.



① $n<0$ 일 때 적분 구간 없음.

$$y[n]=0$$

② $n-N+1\le 0\le n$ 즉 $0\le n\le N-1$ 일 때 적분 구간 $0\sim n$

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}1\cdot 1=n+1$$

③ $0\le n-N+1, n\le 2N-1$ 일 때 즉 $N-1\le n\le 2N-1$ 일 때 적분 구간 $n-N+1\sim n$

$$y[n]=\sum_{k=n-N+1}^{n}1\cdot 1=N$$

④ $n-N+1\le 2N-1\le n$ 일 때 즉 $2N-1\le n\le 3N-2$ 일 때 적분 구간 $n-N+1\sim 2N-1$

$$y[n]=\sum_{k=n-N+1}^{2N-1}1\cdot 1=-n+3N-1$$

⑤ $2N-1<n-N+1$ 일 때 즉 $n>3N-2$ 적분 구간 없음.

$$y[n]=0$$

정리하면

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ n+1 & 0\le n\le N-1\\ N & N-1\le n\le 2N-1\\ 3N-n-1 & 2N-1\le n\le 3N-2\\ 0 & n>3N-2\end{cases}$$

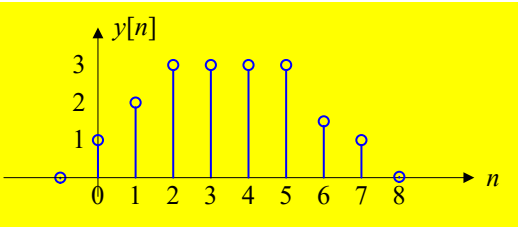
참고 : 중간에서 n 의 부등식에서의 등호는 $y[n]$ 이 양 구간의 경계에서 같으므로 (연속이므로)

양쪽에서 사용하거나 한쪽에서 사용할 수 있다.

2) $N=3$ 일 때에 대해 정리하면

$$y[n]=\begin{cases}0 & n<0\\ n+1 & 0\le n\le 2\\ 3 & 2\le n\le 5\\ -n+8 & 5\le n\le 7\\ 0 & n>7\end{cases}$$

$$y[n]=\{1,2,3,3,3,3,2,1\}$$



문제 3.

1) 극점이 $z=-1/4,1/2$ 이므로 가능한 수렴 영역은 $|z|<1/4, 1/4<|z|<1/2, |z|>1/2$ 이다. 인과 시스템의 수렴 영역은 최외곽 극점을 지나는 원의 외부이므로 수렴 영역은 $|z|>1/2$ 이다. 따라서 임펄스 응답은 다음과 같다.

$$H(z)=\frac{1+z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}=\frac{-1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$h[n]=-\left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n]+2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

수렴 영역은 단위원을 포함하므로 안정 시스템이다.

2) 출력을 z 변환하면

$$Y(z)=-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}+\frac{4}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}=\frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)},\quad \frac{1}{4}<|z|<2$$

입력의 z 변환은 다음과 같다.

$$X(z)=\frac{Y(z)}{H(z)}=\frac{1+z^{-1}}{\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-2z^{-1}\right)}\frac{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{4}z^{-1}\right)}{1+z^{-1}}=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

위 식에서 $X(z)$ 의 극점이 $z=2$ 이므로 $X(z)$ 의 가능한 수렴 영역은 $|z|<2, |z|>2$ 이다. $X(z)$

의 수렴 영역은 $H(z)$의 수렴 영역과 $Y(z)$의 수렴 영역의 공통 부분 $1/2<|z|<2$을 포함해야 하므로 $X(z)$의 수렴 영역은 $|z|<2$가 된다. 따라서 입력 $x[n]$은 다음과 같다.

$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}=\frac{1}{4}+\frac{\frac{3}{4}}{1-2z^{-1}}$$

$$x[n]=\frac{1}{4}\delta[n]-\frac{3}{4}2^n u[-n-1]$$

또는

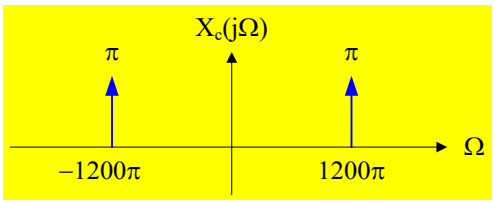
$$X(z)=\frac{1-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}=\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{-\frac{1}{2}z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$x[n]=-2^n u[-n-1]+\frac{1}{2}2^{n-1}u[-n]$$

문제 4.

1) $x_c(t)$의 스펙트럼 $X_c(j\Omega)$는 $\Omega=\pm\Omega_0$에 존재하는 선 스펙트럼 형태이다.

$$x_c(t)=\cos(1200\pi t)=\cos(\Omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \Omega_0=1200\pi$$

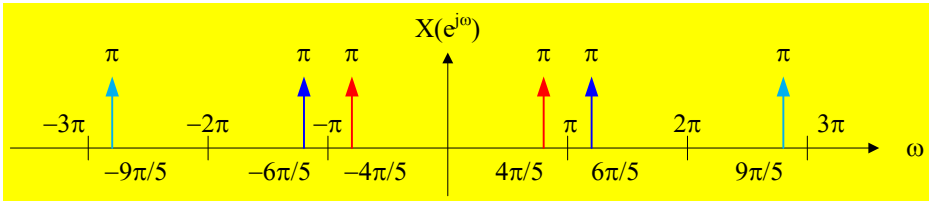


2) $x[n]$

$$x[n]=x_c(nT)=\cos(1200\pi nT)=\cos\left(\frac{1200\pi n}{F_S}\right)=\cos\left(\frac{6\pi}{5}n\right)$$

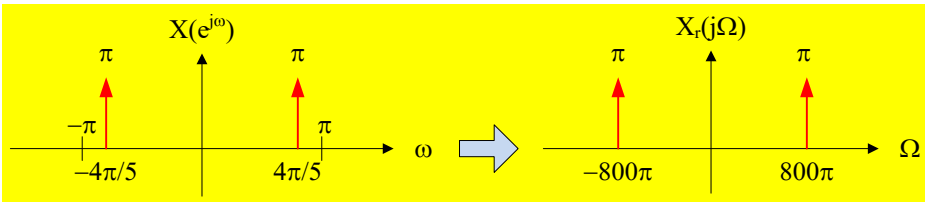
3) $x[n]$의 스펙트럼 $X(e^{j\omega})$ 역시 $\omega=\pm\omega_0$에 존재하는 주기가 2π인 선 스펙트럼 형태이다. 따라서 $X(e^{j\omega})$은 다음과 같다.

$$x[n]=\cos\left(\frac{6\pi}{5}t\right)=\cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow \quad \omega_0=\frac{6\pi}{5}$$



4) $x[n]$으로부터 다시 연속 시간 신호 $x_r(t)$를 복원하려면 $x[n]$을 차단 주파수가 $\omega_c=\pi$인 저역 통과 필터(LPF)에 통과시켜야 한다. 따라서 복원된 $x_r(t)$의 스펙트럼 $X_r(j\Omega)$은 다음과 같다.

(LPF를 통과 시킨 후 주파수 스케일링한다.)



5) 위의 결과로부터 복원된 $x_r(t)$ 는 다음과 같다.

$$x_r(t) = \cos(800\pi t)$$

복원된 신호 $x_r(t)$ 는 원래의 신호 $x_c(t)$ 와 달라 엘리어싱이 발생하였다.

문제 5.

지연된 신호를 단방향 z 변환하면 다음과 같다.

$$y[n] \Rightarrow Y(z)$$

$$y[n-1] \Rightarrow y[-1] + z^{-1}Y(z) = -1 + z^{-1}Y(z)$$

$$y[n-2] \Rightarrow y[-2] + y[-1]z^{-1} + z^{-2}Y(z) = -z^{-1} + z^{-2}Y(z)$$

위 식을 주어진 차분 방정식에 적용하면

$$Y(z) - 5\left\{-1 + z^{-1}Y(z)\right\} + 6\left\{-z^{-1} + z^{-2}Y(z)\right\} = X(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z)\left(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}\right) = -5 + 6z^{-1} + \frac{1}{1-2z^{-1}} = \frac{-4 + 16z^{-1} - 12z^{-2}}{1-2z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{-4 + 16z^{-1} - 12z^{-2}}{\left(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}\right)\left(1-2z^{-1}\right)} = \frac{-4 + 16z^{-1} - 12z^{-2}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2\left(1-3z^{-1}\right)}$$

$Y(z)$ 를 부분 분수 전개하면

$$Y(z) = \frac{-2}{1-2z^{-1}} + \frac{-2}{\left(1-2z^{-1}\right)^2} + \frac{0}{1-3z^{-1}}$$

출력 $y[n]$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} y[n] &= -2 \times 2^n u[n] - 2 \times (n+1)2^n u[n] \\ &= -2^{n+1}u[n] - (n+1)2^{n+1}u[n] \\ &= -(n+2)2^{n+1}u[n] \end{aligned}$$